**Chủ đề**

8

**BẤT ĐẲNG THỨC**

**Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán bất đẳng thức.**

# **H.** **BẤT ĐẲNG THỨC**

**Mục Lục**

[**H. BẤT ĐẲNG THỨC** 1](#_Toc534126610)

[🗁. KIẾN THỨC LÍ THUYẾT 1](#_Toc534126611)

[**🗁. BÀI TẬP** 3](#_Toc534126612)

[**✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên** 7](#_Toc534126613)

[**✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm** 13](#_Toc534126614)

[🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN 19](#_Toc534126615)

# 🗁. KIẾN THỨC LÍ THUYẾT

*1. Định nghĩa bất đẳng thức*

Ta gọi hệ thức dạng  (hay  là bất đẳng thức.

Tính chất của bất đẳng thức

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 3. |
| 2. | 4. |

* 5. Cộng từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.
* 6. Trừ từng vế của hai bất đẳng thức khác chiều được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất.
* 7. Nhân từng vế của hai bất đẳng thức cùng chiều mà hai vế không âm, ta được một bất đẳng thức cùng chiều. Đặc biệt:

.

.

* 8.Nếu  thì 

2. *Một số hằng bất đẳng thức hay dùng.*

* 1. Nếu  và  là hai số cùng dấu thì  (dấu  xảy ra ).
* 2. Nếu  thì  (dấu  xảy ra ).
* 3.  (dấu  xảy ra khi ).
* 4.  (dấu  xảy ra khi  hoặc )
* 5. Bất đẳng thức Cô-si

Với  thì  hay  (dấu  xảy ra khi ).

Vài dạng khác của bất đẳng thức Cô-si.

 ().





*3. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức*

*1. Phương pháp dùng định nghĩa của bất đẳng thức:*

Muốn chứng minh , ta chứng minh 

Muốn chứng minh  ta chứng minh 

*2. Phương pháp biến đổi tương đương:* 

Nếu bất đẳng thức cuối đúng thì bất đẳng thức đầu đúng.

*3. Phương pháp vận dụng tính chất của bất đẳng thức và vận dụng những hằng bất đẳng thức quen thuộc:*

Từ các bất đẳng thức đã biết ta dùng các tính chất của bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

*4. Phương pháp phản chứng:*

Muốn chứng minh  ta giả sử  rồi suy ra một điều vô lí (mâu thuẫn với điều đã cho hoặc đã biết), từ đó suy ra điều giả sử là sai, điều phải chứng minh là đúng.

# **🗁. BÀI TẬP**

**Bài 1:** Cho 3 số thực dương *a, b, c.*  Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

 (đpcm)

**Bài 2:** Cho 4 số thực dương *a, b, c, d.*  Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: (đpcm)

**Bài 3:** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa  *.*

Chứng minh rằng

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

 (đpcm)

**Bài 4:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa  *.*  Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:  **(1)**

Tương tự:  **(2)**

Cộng theo vế **(1)** và **(2)**, ta được:  (đpcm)

**Bài 5:** Cho 2 số thực dương *a, b.*  Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:(đpcm)

**Bài 6:** Cho 2 số thực dương *a, b.*  Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

(đpcm)

**Bài 7:** Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Vì  nên 

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

 (đpcm)

**Bài 8:** Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

 (đpcm)

**Bài 9:** Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: (đpcm)

**Bài 10:** Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Với  , áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: (đpcm)

**Bài 11:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Hướng dẫn giải**



Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  hay 

Vậy GTNN của 

**Bài 12:** Chứng minh rằng: 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: 

**Bài 13:** Cho ba số thực dương *a, b, c*. CMR: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



**Bài 14:** Cho ba số thực **. CMR: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



**Bài 15:** Cho ba số thực dương *a, b, c* thỏa **. CMR

**Hướng dẫn giải**





Vậy 

**Bài 16:** Cho ba số thực dương *a, b, c*. CMR: 

**Hướng dẫn giải**

Ta có:



# **✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị xảy ra ở biên.**

Xét các bài toán sau:

**Bài 1:** Cho số thực . Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của 

**Sai lầm thường gặp là**: . Vậy GTNN của *A* là 2.

**Nguyên nhân sai lầm**: GTNN của *A* là 2 vô lý vì theo giả thuyết thì .

**Lời giải đúng**: 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là .

Vì sao chúng ta lại biết phân tích được như lời giải trên. Đây chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.

Quay lại bài toán trên, dễ thấy *a* càng tăng thì *A* càng tăng. Ta dự đoán *A* đạt GTNN khi . Khi đó ta nói *A* đạt GTNN tại “**Điểm rơi** ” . Ta không thể áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho hai số và vì không thỏa quy tắc dấu “=”. Vì vậy ta phải tách  hoặc  để khi áp dụng bất đẳng thức AM - GM thì thỏa quy tắc dấu “=”. Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM cho cặp số sao cho tại “**Điểm rơi** ” thì , ta có sơ đồ sau: 

Khi đó:  và ta có lời giải như trên.

**Lưu ý:** *Để giải bài toán trên, ngoài cách chọn cặp số  ta có thể chọn các các cặp số sau:  hoặc  hoặc .*

**Bài 2:** Cho số thực . Tìm giá trị nhỏ nhất của 

Sơ đồ điểm rơi:



**Sai lầm thường gặp là**: .

Dấu “=” xảy ra .

Vậy GTNN của *A* là 

**Nguyên nhân sai lầm**: Mặc dù GTNN của *A* là  là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc sai lầm trong đánh giá mẫu số: “  là sai”.

**Lời giải đúng**: 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 1:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa . Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Ta có: 

Sơ đồ điểm rơi: 

**Giải:**

Ta có:





Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 2:** Cho số thực . Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Ta có : 

Dễ thấy *a* càng tăng thì *A* càng tăng. Ta dự đoán *A* đạt GTNN khi . Ta có sơ đồ điểm rơi: 

**Giải:**

Ta có: 

Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 39

**Bài 3:** Cho 3 số thực dương *a, b, c*  thỏa  .

Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Dự đoán GTNN của *A* đạt được khi  ,tại điểm rơi .

Sơ đồ điểm rơi:







**Giải:**



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 4:** Cho3 số thực dương *a, b, c*  thỏa  .

Chứng minh rằng: 

**Phân tích:**

Dự đoán GTNN của *A* đạt được khi , tại điểm rơi .

**Giải:**

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:







Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

 (đpcm)

# **✪ Kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán cực trị đạt được tại tâm**

Xét bài toán sau:

**Bài toán:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa .. Tìm GTNN của 

**Sai lầm thường gặp là**: . Vậy GTNN của *A* là 4.

**Nguyên nhân sai lầm**: GTNN của *A* là 4 . Khi đó  trái giả thuyết .

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b* nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi: 

**Lời giải đúng**: 

Dấu “=” xảy ra. Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 1:** Cho 3 số thực dương *a, b, c*  thỏa .

Tìm GTNN của

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại



Sơ đồ điểm rơi:



**Giải:**



Dấu “=” xảy ra . Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 2:** Cho 3 số thực dương *a, b, c*  thỏa .

Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với  *a, b, c* nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi: 

**Giải:**



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 3:** Cho 2 số thực dương *a, b*. Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b* nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi:



**Giải:**



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 4:** Cho 3 số thực dương *a, b, c*.

Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi:



**Giải:**





Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 5:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa .

Tìm GTNN của : 

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi: 

**Giải:**



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 4

**Bài 6:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa . Tìm GTNN của **Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi: 

**Giải:**









Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 

**Bài 7:** Cho 2 số thực dương *a, b* thỏa . Tìm GTNN của 

**Phân tích:**

Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Sơ đồ điểm rơi: 



**Giải:**







Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 7

# **🗁. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1:** Cho  , chứng minh rằng:

a)  ; b)  .

**Bài 2:** Cho  , chứng minh rằng:

a) ;

b)  .

**Bài 3:** Chứng minh rằng: 

**Bài 4:** Chứng minh rằng: 

**Bài 5:** Cho , . Chứng minh rằng: 

**Bài 6:** Cho  thỏa mãn điều kiện ;  .

Chứng minh rằng